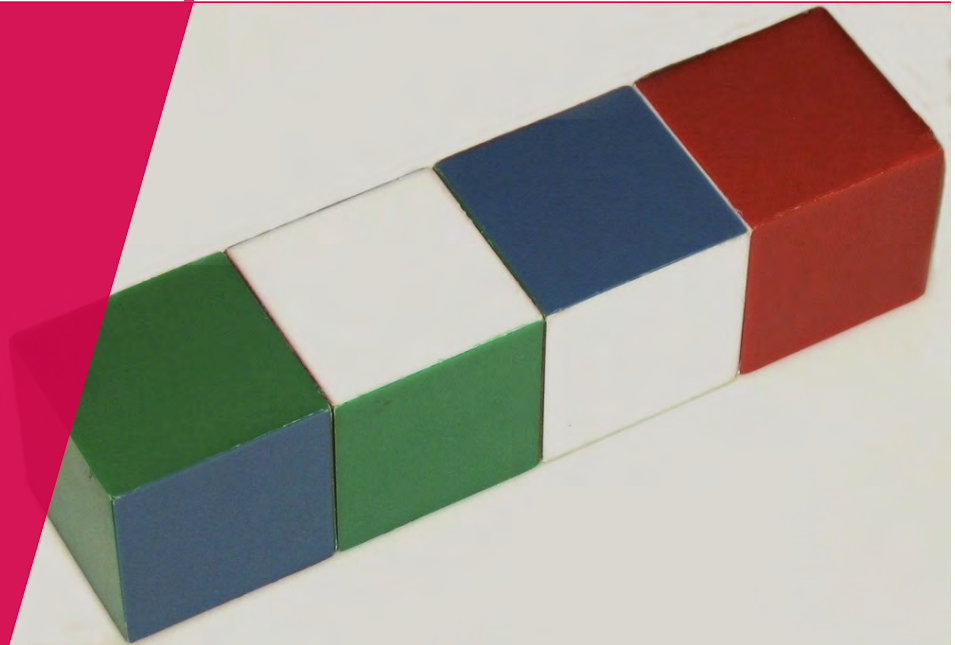


Kubussen stapelen

Erjen Lefeber

Nationale Wiskunde Dagen

Noordwijkerhout, 2 februari 2018



Where innovation starts

- ▶ Ik neem aan dat puzzel is gedownload van <http://mn.wtb.tue.nl/~lefeber/KubussenStapelen.pdf>
- ▶ Deze presentatie is te vinden via <http://mn.wtb.tue.nl/~lefeber/> onder Talks

Geraadpleegde bronnen:

- ▶ <http://robspuzzlepage.com/pattern.htm>
- ▶ T.H. O'Beirne, *Puzzles and Paradoxes*, Chapter 7, Oxford University Press, 1965
- ▶ <https://www.jaapsch.net/puzzles/>
- ▶ <https://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/graphtheory/ii/answerstoinstantinsanity.html>

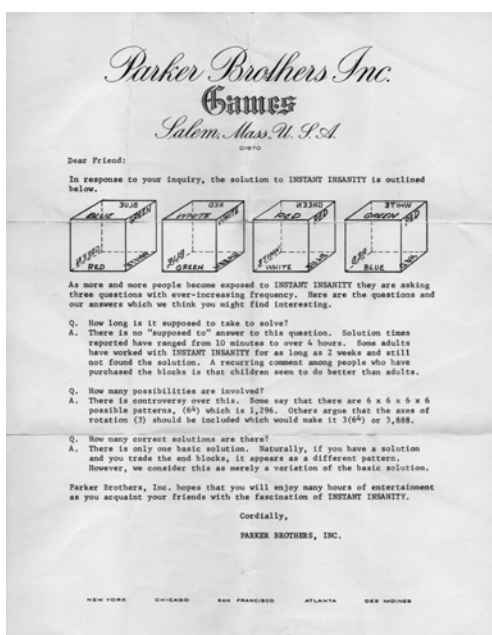
Oudste respectievelijk **meest recente publicatie** die ik heb kunnen vinden over dit onderwerp:

- ▶ F. De Carteblanche. The coloured cubes problem. *Eureka*, 9:9–11, 1947.
- ▶ É.B. Roldán Roa, The mutando of Instantity, arXiv:1610.09371 [math.HO], 2016.

Veel varianten van deze puzzel en meerdere namen:



- ▶ Katzenjammer Puzzle (1900)
- ▶ Symingtons Puzzle (1920s)
- ▶ (Great) Tantalizer (1940s)
- ▶ Instant Insanity (1967)



- Q. How many possibilities are involved?
A. There is controversy over this. Some say that there are $6 \times 6 \times 6 \times 6$ possible patterns, (64) which is 1,296. Others argue that the axes of rotation (3) should be included which would make it $3(64)$ or 3,888.
- Q. How many correct solutions are there?
A. There is only one basic solution. Naturally, if you have a solution and you trade the end blocks, it appears as a different pattern. However, we consider this as merely a variation of the basic solution.

Aantal mogelijkheden van de uitgever is niet correct.

Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er nu echt?

- ▶ Zes mogelijkheden voor grondvlak
- ▶ Vier mogelijkheden voor voorvlak
- ▶ Identieke oplossing bij roteren (4 respectievelijk 2)

Totaal: $24^4 / (4 \cdot 2) = 41.472$.

Heeft de uitgever wel gelijk dat er maar één oplossing is?

Stel je kiest een kleur voor de voorkant.

- ▶ Kun je dan de kleur van de achterkant wijzigen?
- ▶ Kun je dan de kleur van de linkerkant wijzigen?
- ▶ En hoe zit het dan daarna met de rechterkant?

Het is dus belangrijk te weten welke kleuren tegenover elkaar liggen.

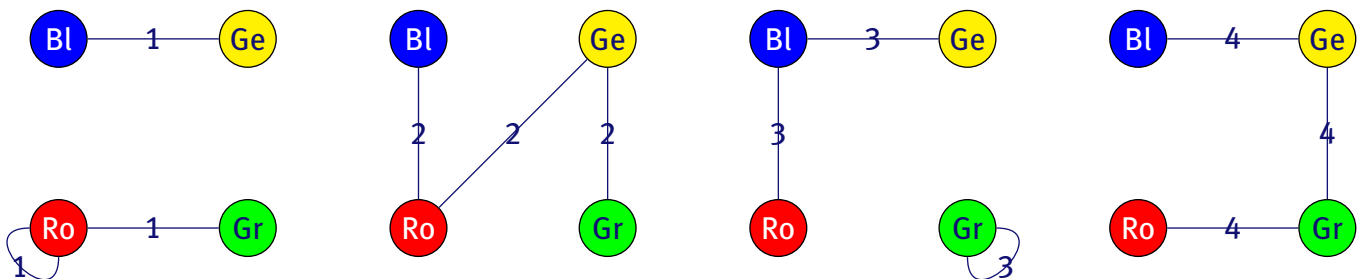
Dit inzicht kunnen we gebruiken om de puzzel op te lossen.

Opmerkelijk feit: meeste uitgebrachte puzzels zijn identiek!

Karakteriseer kubussen met behulp van grafen.

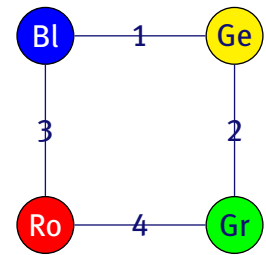
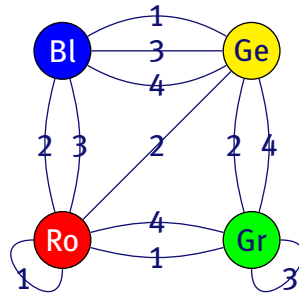
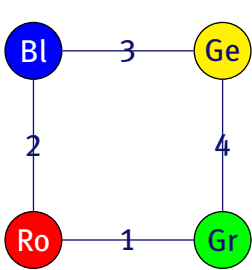
Gebruik voor de punten: kleuren.

Verbind twee punten in een graaf wanneer ze tegenover elkaar liggen.



Combineer vervolgens de grafen tot één (multi)graaf.

Combineer de grafen tot één (multi)graaf.



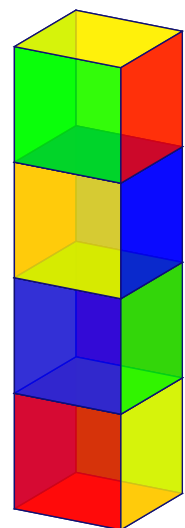
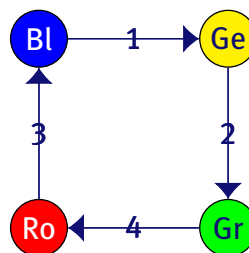
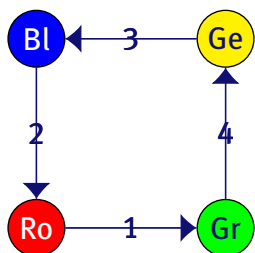
Haal uit de (multi)graaf twee deelgrafen met de volgende eigenschappen:

- ▶ Elk punt heeft graad twee
- ▶ Van elke kubus wordt één lijn gebruikt
- ▶ De twee deelgrafen hebben geen lijnen gemeenschappelijk

7

Oplossing: Stap 2

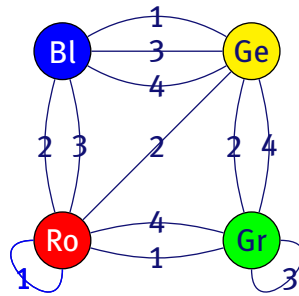
Gebruik de twee deelgrafen om oplossing te maken:



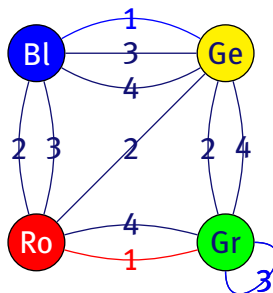
- ▶ Maak een gerichte deelgraaf, met ingraad en uitgraad beide 1.
- ▶ voor linker deelgraaf: VOORKANT → ACHTERKANT
- ▶ voor rechter deelgraaf: LINKS → RECHTS

8

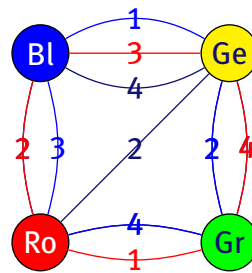
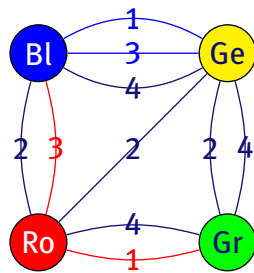
Oplossing: Stap 3



- ▶ **Stel** Rood-Rood van kubus 1 zit in een deelgraaf van een oplossing
- ▶ Dan kunnen we alle overige lijnen van rood en van kubus 1 weg laten
- ▶ Maar dan kunnen we geen valide deelgraaf maken
- ▶ Dus Rood-Rood van kubus 1 zit **niet** in een deelgraaf van een oplossing



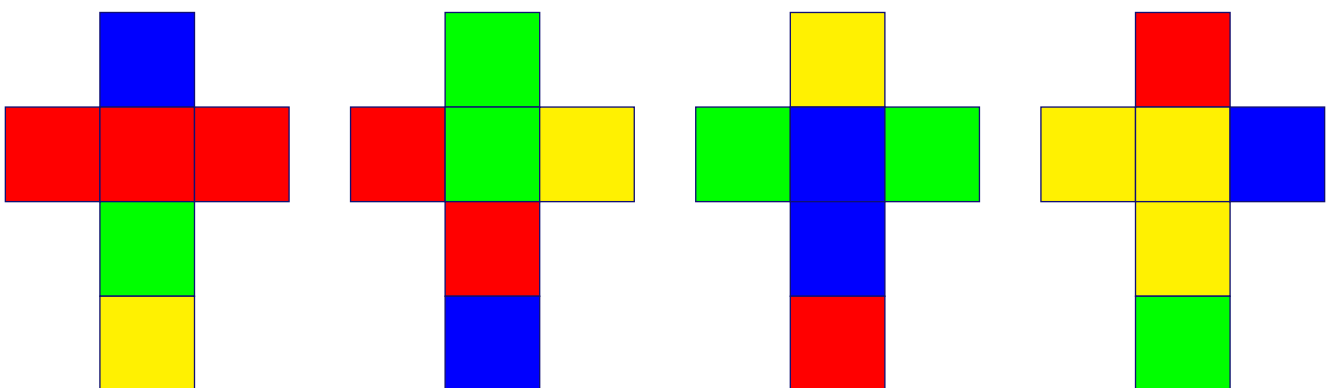
- ▶ Lijnen van kubus 1 in deelgrafen liggen vast (rood respectievelijk blauw)
- ▶ Groen-Groen van kubus 3 kan niet in "rode", maar **stel** wel in "blauwe" deelgraaf
- ▶ Dan kunnen we alle overige lijnen van groen en van kubus 3 weg laten
- ▶ Geen valide "blauwe" deelgraaf, dus Groen-Groen van kubus 3 **niet** in oplossing



- ▶ Lijnen van kubussen 1 en 3 liggen vast, maar twee mogelijkheden
- ▶ Linker optie valt af, omdat geen "blauwe" deelgraaf mogelijk is
- ▶ Voor "blauwe" deelgraaf moet kubus 2 Geel-Groen zijn, dus "blauwe" ligt vast
- ▶ Voor "rode" deelgraaf is nu ook nog maar één mogelijkheid

11

Hoeveel oplossingen zijn er? Stap 3

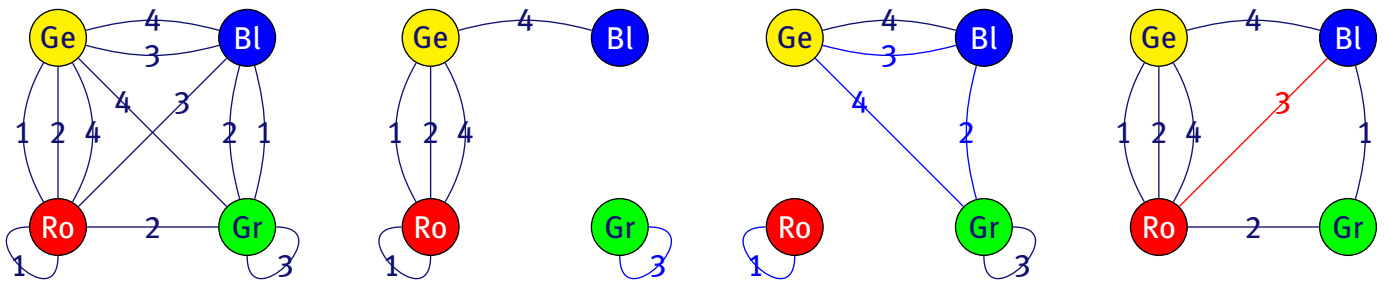


- ▶ Stapel de vier kubussen zo dat je zowel voor, achter, links, als rechts vier verschillende kleuren ziet.
- ▶ Hoeveel (verschillende) oplossingen zijn er?

12

Nieuwe puzzel

Combineer de grafen tot één (multi)graaf.

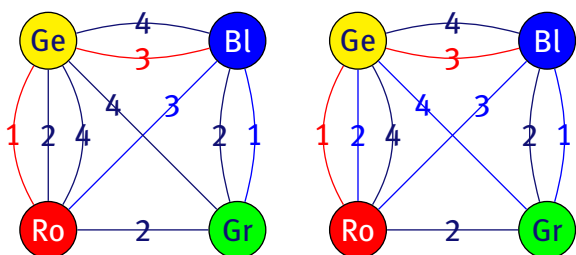


- ▶ Deelgraaf met Groen-Groen van kubus 3 kan niet
- ▶ Deelgraaf met Rood-Rood van kubus 1 heeft één mogelijkheid
- ▶ Maar complementaire deelgraaf kan niet
- ▶ Lijnen van kubussen 1 en 3 liggen vast, maar twee mogelijkheden

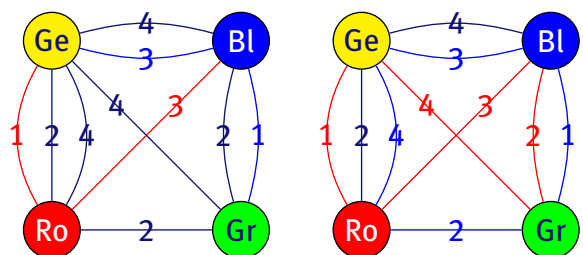
13

Oplossing van nieuwe puzzel

Optie 1:



Optie 2:



- ▶ Bij optie 1 is wel "blauwe" deelgraaf mogelijk, maar geen complementaire
- ▶ Bij optie 2 is er precies één splitsing in deelgrafen mogelijk (rood en blauw)
- ▶ Dus hoewel er 4 deelgrafen zijn, is er maar één oplossing.

14

Oplossing van nieuwe puzzel



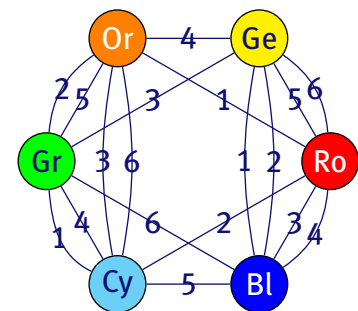
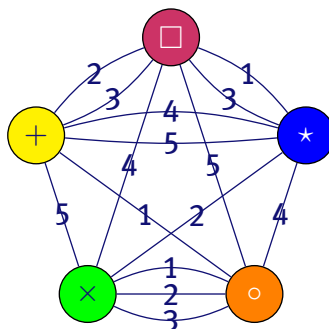
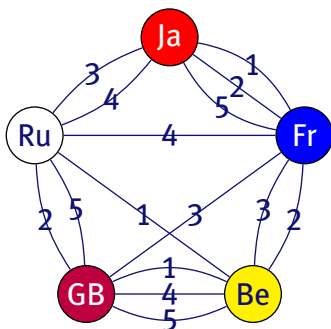
Met vijf kubussen, of zelfs met zes kubussen



15

Vergelijkbare puzzels

Multigrafen voor vijf kubussen (eerste twee van vorige slide) en zes kubussen (eerste van vorige slide)



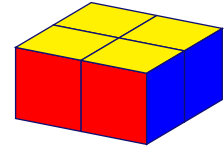
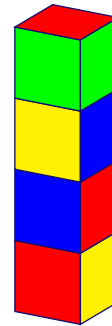
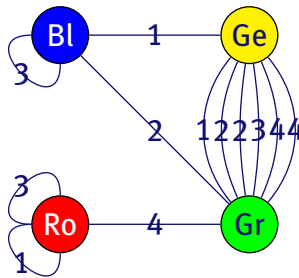
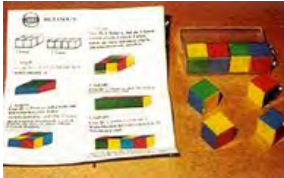
Interessante vragen:

- ▶ Hoeveel mogelijkheden zijn er? Kun je een oplossing vinden? Is er een unieke oplossing?
- ▶ Kun je zelf een (nieuwe) puzzel (met unieke oplossing) bedenken?
- ▶ Hoeveel verschillende puzzels met een unieke oplossing kun je maken?

16

Bijbehorende multigrafen

Mutando (2 puzzels in één):

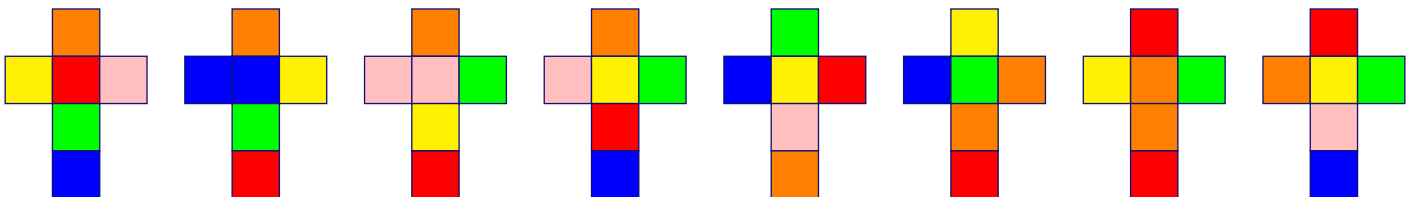


- ▶ Stapel de vier kubussen zodat je zowel voor, achter, links en rechts vier **verschillende** kleuren ziet
- ▶ Leg de vier kubussen in een vierkant zodat elk zijvlak **dezelfde** kleur heeft.

17

Vergelijkbare puzzel 1

Moshe's Insanity (8 blokken met 6 verschillende kleuren):



- ▶ Maak een $2 \times 2 \times 2$ -kubus zodat elk zijvlak een andere kleur heeft (precies één kleur per zijvlak)
 - Je moet nu niet een graaf maken waarbij je tegenoverliggende vlakken met elkaar verbindt
 - Wat is de beperking die je hier hebt?
 - Tipje van sluier opgelicht:
 - Neem als punten zowel kubussen (8 punten) als karakterisering van hoekpunten
 - Zoek maximumkoppeling (Engels: maximum matching)

18

Vergelijkbare puzzel 2 (moeilijk)