

Een eenvoudige (lineaire) regelaar
voor een niet-lineair systeem

E. Lefeber en H. Nijmeijer
Drebbel-symposium, 21 januari 1998

Gebaseerd op:

E. Lefeber, E. Panteley, A. Loria en H. Nijmeijer: Exponential tracking control of a mobile car using a cascaded approach

Overzicht

- Model en probleemformulering
- Cascaded systems
- Het afleiden van een eenvoudige (lineaire) regelaar
- Simulaties
- (Dynamische uitbreiding)
- Conclusies

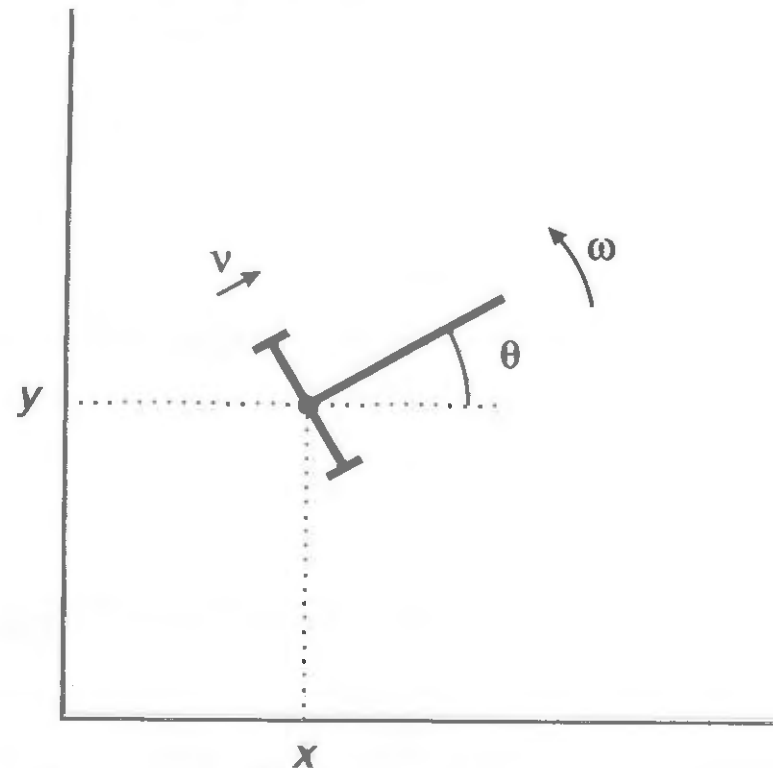
Eenvoudig kinematisch model voor mobiele robot

De dynamica wordt beschreven door

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$



v : voorwaartse snelheid van mobiele robot

w : hoeksnelheid van de mobiele robot

Probleem formulering (I)

We willen een referentie-robot volgen:

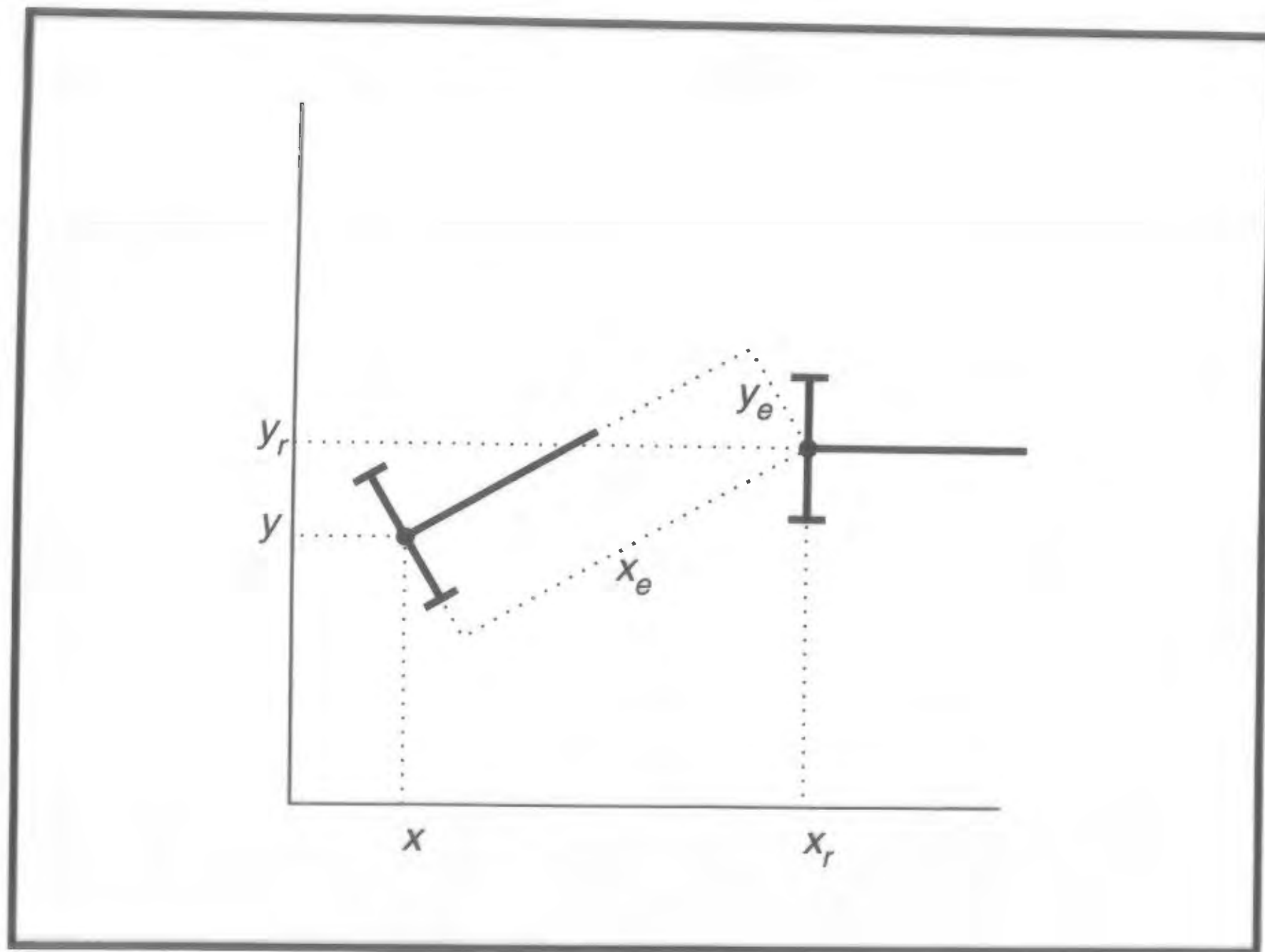
$$\dot{x}_r = v_r \cos \theta_r$$

$$\dot{y}_r = v_r \sin \theta_r$$

$$\dot{\theta}_r = \omega_r$$

Definieer fout-coördinaten

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}$$



Probleem formulering (II)

Fout-dynamica

$$\dot{x}_e = \omega y_e - v + v_r \cos \theta_e$$

$$\dot{y}_e = -\omega x_e + v_r \sin \theta_e$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \omega$$

Vind een (eenvoudige) regelwet van de vorm

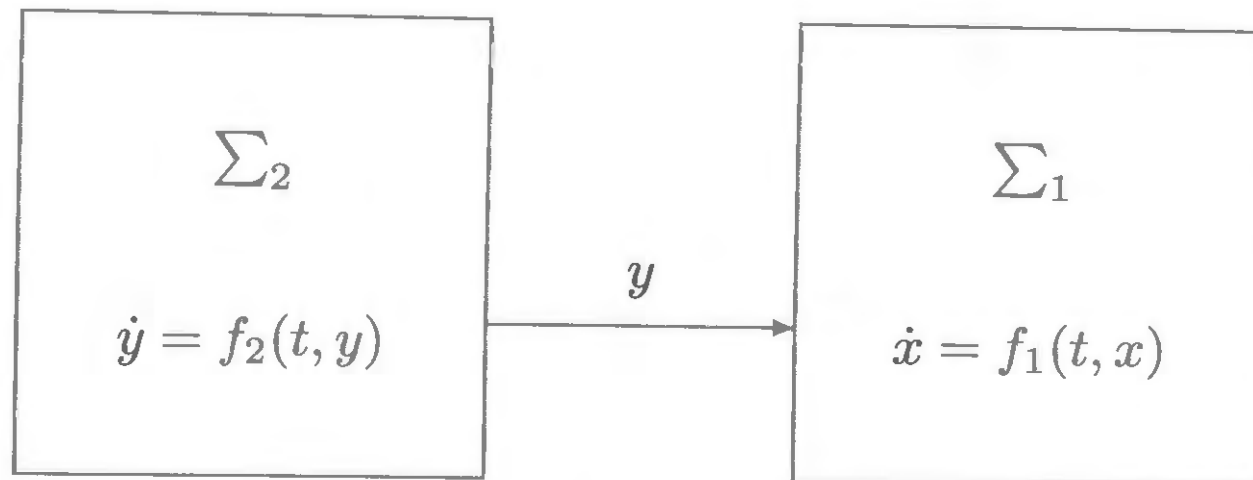
$$v = v(x_e, y_e, \theta_e, v_r, \omega_r)$$

$$\omega = \omega(x_e, y_e, \theta_e, v_r, \omega_r)$$

opdat voor *elke* begin-conditie $[x_e(0), y_e(0), \theta_e(0)]^T$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_e(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y_e(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\theta_e(t)| = 0$$

Cascaded systems



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(t, x) + g(t, x, y)y \\ \dot{y} &= f_2(t, y)\end{aligned}$$

Voorwaarden

E. Panteley en A. Loría:

Cascade globaal asymptotisch stabiel als

- Σ_1 globaal asymptotisch stabiel
- $g(t, x, y)$ ten hoogste linear in x .
- Σ_2 globaal asymptotisch stabiel, $y(t)$ integreerbaar

Nauwkeuriger formulering

Cascade *Globaal Uniform Asymptotisch Stabiel* als

- Σ_1 GUAS en er bestaat cont. diff. $V \geq 0$ met $\dot{V} \leq 0$ en $\|\frac{\partial V}{\partial x}\| \|x\| \leq c_1 V$ voor alle $\|x\| \geq \eta$
- $\|g(t, x, y)\| \leq \theta_1(\|y\|) + \theta_2(\|y\|)\|x\|$
- Σ_2 GUAS en voor alle $t_0 \geq 0$:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|y(t, t_0, y(t_0))\| dt \leq \kappa(\|y(t_0)\|)$$

met $\kappa(\cdot)$ een klasse- $\mathcal{K}$ -functie.

Afleiden regelaar

Fout dynamica

$$\dot{x}_e = \omega y_e - v + v_r \cos \theta_e$$

$$\dot{y}_e = -\omega x_e + v_r \sin \theta_e$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \omega$$

Neem nu

$$\omega = \omega_r + c_1 \theta_e \quad c_1 > 0$$

Invullen van $\theta_e = 0$ geeft ($\omega = \omega_r$):

$$\dot{x}_e = \omega_r y_e - v + v_r$$

$$\dot{y}_e = -\omega_r x_e$$

We hebben dus

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r(t) \\ -\omega_r(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (v - v_r)$$

Door de keuze $v = v_r + c_2 \overset{x_e}{\theta_e}$ met $c_2 > 0$ wordt dit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 & \omega_r(t) \\ -\omega_r(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$$

Globaal as. stabiel als $\omega_r(t)$ voldoende exciterend (!), d.w.z.

Er bestaan $\delta, k > 0$ zodat:

$$\int_t^{t+\delta} \omega_r(\tau)^2 d\tau \geq k \quad \forall t \geq t_0$$

Simulaties

Het systeem

$$\dot{x}_e = \omega y_e - v + v_r \cos \theta_e$$

$$\dot{y}_e = -\omega x_e + v_r \sin \theta_e$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \omega$$

in gesloten lus met de regelaar

$$v = v_r + 2x_e$$

$$\omega = \omega_r + \theta_e$$

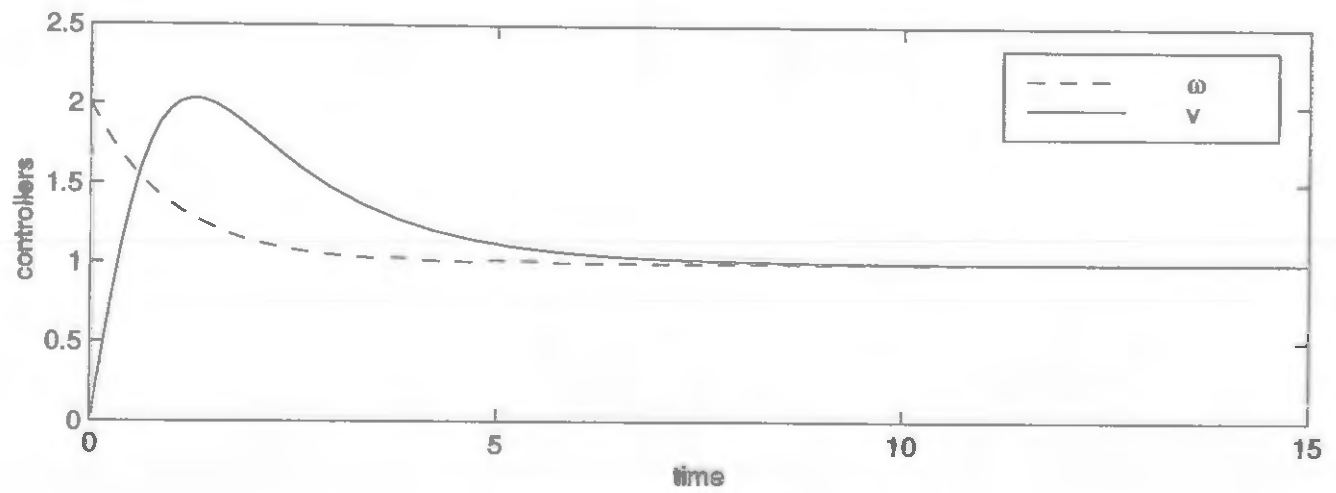
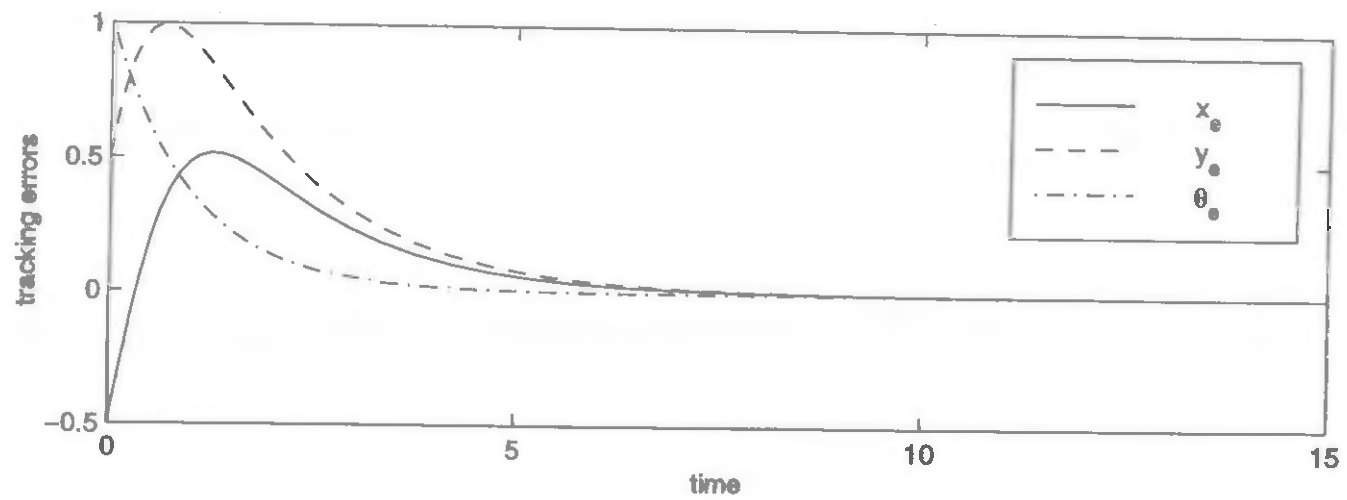
Referentie traject (cirkel):

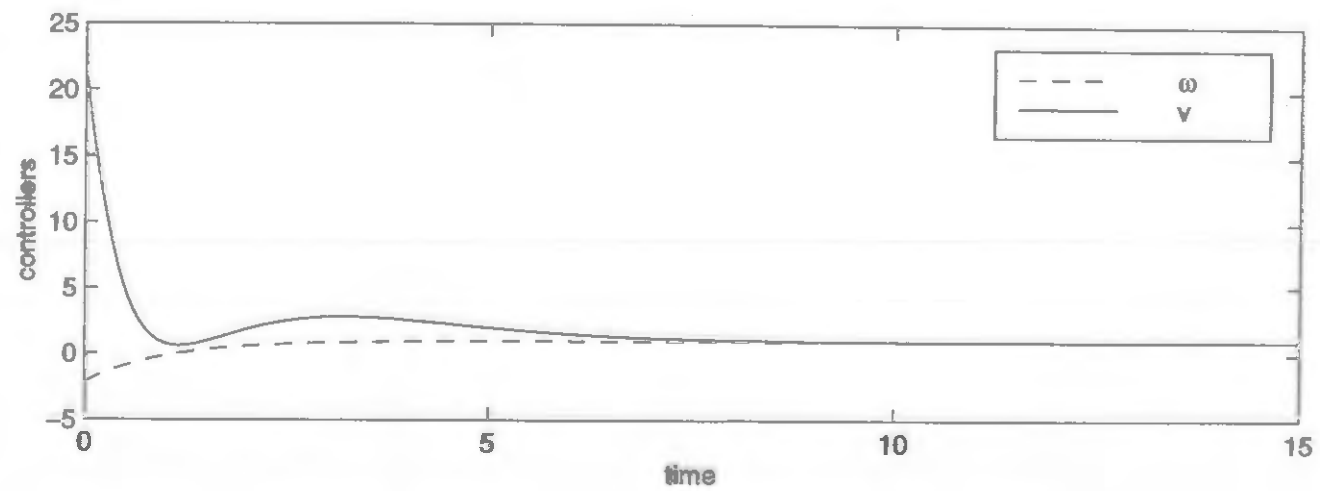
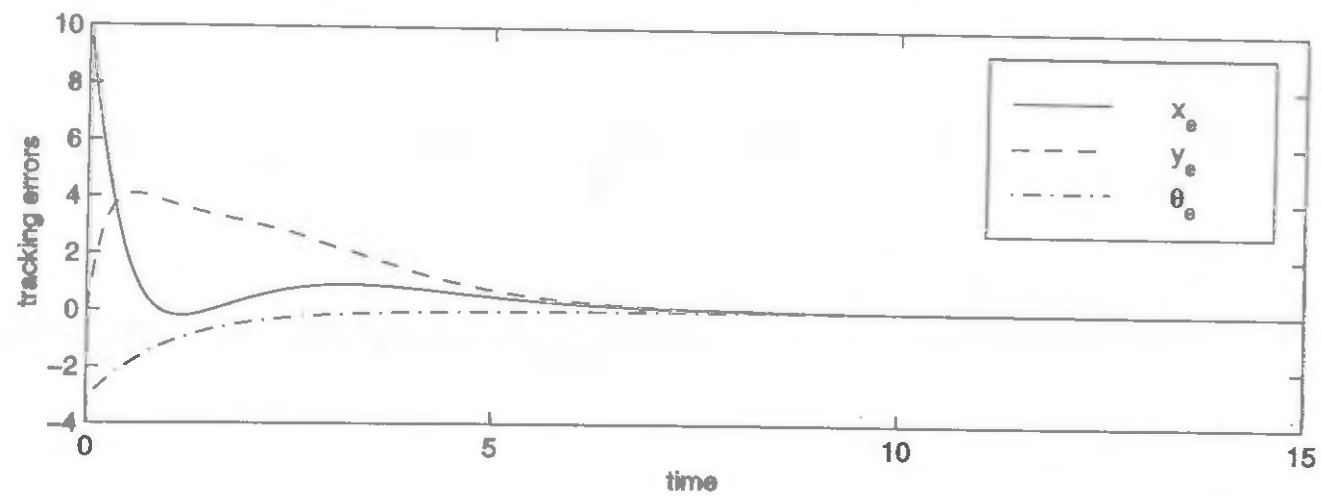
$$v_r = 1$$

$$\omega_r = 1$$

Begin-conditie $[x_e(0), y_e(0), \theta_e(0)]^T = [-0.5, 0.5, 1]^T$.

Begin-conditie $[x_e(0), y_e(0), \theta_e(0)]^T = [-10, 0, -\pi]^T$.





Dynamische uitbreiding

Beschouw nu

$$\dot{x}_e = \omega y_e - v + v_r \cos \theta_e$$

$$\dot{y}_e = -\omega x_e + v_r \sin \theta_e$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \omega$$

$$\dot{v} = u_1$$

$$\dot{\omega} = u_2$$

Definieer nu

$$v_e = v - v_r$$

$$\omega_e = \omega - \omega_r$$

Dan kunnen we schrijven

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{v}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \omega_r(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_r(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ v_e \\ y_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u_1 - \dot{v}_r) +$$

$$+ \begin{bmatrix} v_r - v_r \cos \theta_e + y_e \omega_e \\ 0 \\ v_r \sin \theta_e - x_e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_e \\ \dot{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \omega_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_2 - \dot{\omega}_r)$$

De regelaar

$$u_1 = \dot{v}_r + c_3 x_e - c_4 v_e$$

$$u_2 = \dot{\omega}_r + c_5 \theta_e - c_6 \omega_e$$

geeft globaal asymptotisch stabiliteit, mits $\omega_r(t)$ voldoende exciterend.

Conclusies

- Simpele (lineaire) regelaars voor (niet-lineaire) mobiele robot. Zowel voor kinematisch model als dynamische uitbreiding.
- Globaal (niet gebaseerd op linearisatie), exponentieel.
- Kan soortgelijk met saturaties.
- Vergelijkbare regelaar werkt ook bij complexer model.
- Ontwerpen adaptieve regelaar mogelijk.